

Мороз І.О.,
доктор педагогічних наук,
професор
Іваній В.С.,
кандидат технічних наук,
професор
Дємєнтьєв Є.А.,
Щупачинська А.В.,
магістранти
(Сумський державний
педагогічний університет
імені А.С. Макаренка)

МЕТОДИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ ВАРІАЦІЙНОГО ПРИНЦИПУ ГАМІЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСЬКОГО

На основі аналізу актуальних досліджень констатується, що обґрунтування основ аналітичних методів дослідження фізичних систем та варіаційних методів залишилося поза увагою методичної науки, воно зовсім не висвітлене у методичній літературі та лише фрагментарно описується в деяких навчальних посібниках, що є недостатнім і необґрунтованим. Тому, висвітлення методичних аспектів обґрунтування теми «Варіаційний інтегральний принцип стаціонарної дії» при навчанні теоретичної фізики в педагогічних університетах є актуальним.

Опираючись на те, що механічний стан у кожний момент часу однозначно визначається як конфігурацією системи, так і швидкостями системи, можна довільно ввести деяку динамічну функцію стану системи $F = F(q_s, \dot{q}_s, t)$, яка обов'язково повинна бути пов'язаною із координатами та швидкостями всіх матеріальних точок і можливо часу, якщо в'язі не стаціонарні. Якщо відволіктись від дії заданих сил, а врахувати лише дію накладених в'язей, то зрозуміло, що, не розриваючи зв'язок із тілами, які обмежують рух матеріальних точок системи, тобто із в'язями, система із положення 1 в положення 2 за *той же проміжок часу* ($t_2 - t_1$) могла перейти великою кількістю шляхів (дуже близьких до прямих, щоб не порушувались в'язі), які не описуються рівняннями руху, а відповідають лише рівнянням в'язей. Значення функції (1) у кожний момент часу помножимо на dt і проінтегруємо за проміжком часу ($t_2 - t_1$):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} F(q_s, \dot{q}_s, t) dt. \quad (1)$$

Для визначення критерію, який відрізняє дійсний (прямий) шлях системи від усіх інших близьких, кінематично можливих

(віртуальних) при заданих в'язях, шляхів, які не відповідають рівнянням руху і тому вони в реальності не здійснюються, визначимо варіацію вказаної функції стану:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^l \left(\frac{\partial F}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt \quad (2)$$

Як відомо з математики, для того, щоб функція виду

$$S = \int_{t_1}^{t_2} F(q_s, \dot{q}_s, t) dt \quad (\text{де } q_s = q_s(t), \dot{q}_s = \dot{q}_s(t)) \text{ у межах } t_1 \text{ і } t_2$$

приймала стаціонарне (в окремих випадках – екстремальне) значення, необхідно й достатньо, щоб її перша варіація дорівнювала нулю $\delta S = 0$, що, очевидно, можливо лише, якщо

всі коефіцієнти в (2) при незалежних варіаціях δq_s будуть рівними нулю. Отже, із (2) маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, l. \quad (3)$$

Оскільки для дійсного шляху функція $F(q_s, \dot{q}_s, t)$ вибрана довільно, то у якості такої довільної функції можна вибрати функцію Лагранжа $L(q_s, \dot{q}_s, t)$, яка залежить від тих же змінних, що й запропонували Гамільтон та Остроградський. Тоді рівняння (3) перетворюються у рівняння Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, l, \quad (4)$$

які є рівняннями дійсного руху механічної голономної системи із потенціальними (узагальнено-потенціальними силами), а інтеграл дії (1) набуває вигляду:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (5)$$

і, отже для стаціонарності інтегралу дії на дійсному шляху потрібно, щоб перша варіація (2) була рівною нулю ($\delta S = 0$), і тому можемо сформулювати принцип Остроградського-Гамільтона: дійсний рух механічної системи між двома заданими положеннями $q(t_1)$ та $q(t_2)$ конфігураційного простору Q відбувається вздовж траєкторії, для якої функціонал дії $S(q, t_1, t_2)$ набуває стаціонарного значення.

Для закріплення матеріалу студентам пропонується розглянути задачу про рух гармонічного осцилятора і визначити величину дії між двома точками вздовж траєкторії і вздовж іншої близької лінії між цими ж точками.